1 Цепные дроби

2 Конечные цепные дроби

Определение. Выражение вида

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_m}}}},$$

где $a_0 \in \mathbb{Z}$, $a_1, \ldots, a_{m-1} \in \mathbb{N}, a_m \in \mathbb{N}/\{1\}$ называется *цепной дробью*, а m - *длиной цепной дроби.* $a_0, a_1, \ldots, a_m$ будем называть *коэффициентами цепной дроби.*

Далее для удобства такую цепную дробь будем обозначать в виде $[a_0, a_1, \ldots, a_m]$.

Замечание. Нетрудно видеть что любая цепная дробь равна некоторому рациональному числу $\frac{k}{l}$.

Пример. $a_0 + \dfrac{1}{a_1}$ - цепная дробь длины 1, $a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$ - цепная дробь длины 2.

$$\frac{11}{3} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}.$$

$$\frac{-7}{3} = -3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}.$$

Теорема 1. Дробь $\frac{k}{l}$ равна некоторой цепной дроби тогда и только тогда когда коэффициенты этой цепной дроби - последовательные неполные частные в алгоритме Евклида для пары (k, l).

Доказательство.

Докажем достаточность. Распишем алгоритм Евклида для пары (k, l):

$$k = q_1 l + r_1,$$

$$l = q_2 r_1 + r_2,$$

$$r_1 = q_3 r_2 + r_3,$$

$$\ldots$$

$$r_s = q_{s+2} r_{s+1} + r_{s+2}$$

$$r_{s+1} = r_{s+2} q_{s+3}.$$

Перепишем его в следующем виде:

$$\frac{k}{l} = q_1 + \frac{r_1}{l},$$

$$\frac{l}{r_1} = q_2 + \frac{r_2}{r_1},$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_3 + \frac{r_3}{r_2},$$

$$\cdots$$

$$\frac{r_s}{r_{s+1}} = q_{s+2} + \frac{r_{s+2}}{r_{s+1}},$$

$$\frac{r_{s+1}}{r_{s+2}} = q_{s+3}.$$

Тогда $\frac{k}{l} = q_1 + \frac{r_1}{l} = q_1 + \frac{1}{l/r_1} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{r_2}{r_1}} = q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{r_1/r_2}} = q_1 +$

$\cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cfrac{r_3}{r_2}}} = \cdots = [q_1, q_2, q_2, \cdots, q_{s+3}].$

Нетрудно видеть, что все коэффициенты q_i удовлетворяют условиям указанным в определении.

Докажем необходимость. Воспользуемся индукцией по длине дроби.Случай $m = 0$ очевиден. В случае $m = 1$ получаем

$$\frac{k}{l} = a_0 + \frac{1}{a_1}.$$

Исходя из того, что $\frac{1}{a_1} < 1$ получаем, что $\left[\frac{k}{l}\right] = a_0$. Пусть $k = ql + r$, тогда $a_0 = q$. Тогда $\frac{1}{a_1} = \frac{r}{l}$. Отсюда $r = 1$, $a_1 = l$. Отсюда получаем, что алгоритм Евклида для пары (k, l) выглядит следующим образом

$$k = ql + 1, \quad l = 1 \cdot l.$$

Нетрудно видеть что мы получили необходимое.

Пусть данное утверждение верно для всех $m \leq n$. Докажем его его для $m = n + 1$. Пусть

$$\frac{k}{l} = [a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}].$$

Нетрудно видеть, что $a_0 = \left[\frac{k}{l}\right] = q_1$. Тогда данное равенство можно переписать в виде

$$\frac{l}{r_1} = [a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}].$$

В правой части находится цепная дробь длины n для которой можно применить предположение индукции и получить требуемое.

Замечание. Из этой теоремы следует что любая дробь $\frac{k}{l}$ представима в виде цепной дроби единственным образом. Коэффициенты этой дроби являются неполными частными в алгоритме Евклида.

Пример. Представить в виде цепной дроби $\frac{17}{24}$. Запишем алгоритм Евклида для пары $(17, 24)$:

$$17 = 0 \cdot 24 + 17,$$

$$24 = 1 \cdot 17 + 7,$$

$$17 = 2 \cdot 7 + 3,$$

$$7 = 2 \cdot 3 + 1,$$

$$3 = 3 \cdot 1.$$

То есть $\frac{17}{24} = [0, 1, 2, 2, 3]$.

Определение. *Подходящей дробью* к дроби $[a_0, a_1, \dots, a_m]$ будем называть любую дробь $\frac{P_n}{Q_n} = [a_0, a_1, \dots, a_n]$, где $n \le m$. P_n будем называть *подходящим числителем*, а Q_n *подходящим знаменателем* соответственно.

Замечание. В подходящих дробях мы позволяем последнему коэффициенту быть равным 1.

Пример. Подходящими дробями для дроби $[0, 1, 2, 2, 3]$ являются $[0]$, $[0, 1]$, $[0, 1, 2]$, $[0, 1, 2, 2]$, $[0, 1, 2, 2, 3]$.

Теорема 2. Подходящие числители и знаменатели связаны следующими реккурентными соотношениями

$$P_0 = a_0, \quad Q_0 = 1,$$

$$P_1 = a_0 a_1 + 1 \quad Q_1 = a_1,$$

$$P_n = a_n P_{n-1} + P_{n-2} \quad Q_n = a_n Q_{n-1} + Q_{n-2}.$$

Доказательство

Воспользуемся индукцией по $n (n \le m)$. В истинности утверждения нетрудно убедиться непосредственной проверкой для $n = 0, 1, 2$. Пусть теперь это утверждение верно для некоторого n. Докажем его для $n + 1$.

Рассмотрим подходящую дробь длины n+1 - $\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}]$. Если в этой дробт заменить $a_n + \frac{1}{a_{n+1}}$ на b_n мы получим цепную дробь длины n: $[a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_n]$. Пусть она равна $\frac{\widetilde{P}_n}{\widetilde{Q}_n}$. Тогда по предположению индукции

$$\frac{P_{n+1}}{Q_{n+1}} = \frac{\widetilde{P}_n}{\widetilde{Q}_n} = \frac{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) P_{n-1} + P_{n-2}}{\left(a_n + \frac{1}{a_{n+1}}\right) Q_{n-1} + Q_{n-2}} = \frac{P_n + \frac{P_{n-1}}{a_{n+1}}}{Q_n + \frac{Q_{n-1}}{a_{n+1}}} = \frac{a_{n+1} P_n + P_{n-1}}{a_{n+1} Q_n + Q_{n-1}}.$$

Что и требовалось доказать.

Пример. Рассмотрим дробь $[0, 1, 2, 2, 3]$. Используя Теорему 2 найдём все подходящие числители и знаменатели:

$$P_0 = 0, \quad Q_0 = 1,$$

$$P_1 = 1, \quad Q_1 = 1$$

$$P_2 = 2 \quad Q_2 = 3,$$

$$P_3 = 5, \quad Q_3 = 7,$$

$$P_4 = 17 \quad Q_4 = 24.$$

Свойства подходящих дробей:

1)$P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}$ для любого $1 \le n \le m$.

Доказательство

Воспользуемся индукцией по n. Для $n = 0, 1$ это очевидно верно. Пусть это верно для некоторого n. Докажем это утверждение для $n + 1$:

$$P_{n+1}Q_n - P_nQ_{n+1} = a_nP_nQ_n + P_{n-1}Q_n - a_nP_nQ_n - Q_{n-1}P_n =$$

$$-(P_nQ_{n-1} - Q_nP_{n-1}) = -(-1)^{n-1} = (-1)^n.$$

Что и требовалось доказать.

Пример. Рассмотрим цепную дробь $[0, 1, 2, 2, 3]$. Как было показано ранее $P_3 = 5$, $Q_3 = 7$, $P_4 = 17$, $Q_4 = 24$. Действительно $P_4Q_3 - Q_4P_3 = -1$.

2)$(P_n, Q_n) = 1$ для любого $n \le m$.

Доказательство

Предположим $(P_n, Q_n) \ne 1$, но тогда получим противоречие исходя из равенства $P_nQ_{n-1} - P_{n-1}Q_n = (-1)^{n-1}$.

3) Последовательность Q_n возрастает. Последовательность P_n возрастает, если $a_0 \ge 0$.

Доказательство

Заметим, что $Q_0 \le Q_1$. Тогда и $Q_n \le Q_{n+1}$ исходя из равенства $Q_{n+1} = a_nQ_n + Q_{n-1}$. Аналогично для P_n при $a_0 \ge 0$.

Замечание. Рассмотрим цепную дробь $[-2, 2, 2]$. Для неё $P_0 = -2, P_1 = -3$, то есть P_n не возрастает.

Замечание. Заметим, что начиная со второго члена последовательность Q_n является строго возрастающей.

4)$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}} = \frac{(-1)^{n-1}}{Q_nQ_{n-1}}$ для любого $1 \le n \le m$.

Доказательство

Данное утверждение можно получить из Свойства 2 разделив обе части равенства на Q_nQ_{n-1}.

5)$P_nQ_{n-2} - P_{n-2}Q_n = a_n(-1)^n$ для любого $2 \le n \le m$.

Доказательство

$P_nQ_{n-2} - P_{n-2}Q_n = a_nP_{n-1}Q_{n-2} + P_{n-1}Q_{n-1} - a_nP_{n-2}Q_{n-1} - P_{n-2}Q_{n-1} = a_n(P_{n-1}Q_{n-2} - P_{n-2}Q_{n-1}) = a_n(-1)^{n-2} = a_n(-1)^n$.

6)$\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-2}}{Q_{n-2}} = \frac{(-1)^n a_n}{Q_nQ_{n-2}}$

7)Подходящие дроби чётной длины возрастают, а нечётной убывают.

Доказательство

Достаточно рассмотреть в предыдущем свойсте случаи чётного и нечётного n.

8)Любая подходящая дробь чётной длины меньше любой подходящей дроби нечётной длины.

Доказательство

Исходя из свойства 4 можно получить, что $\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}$.

Если же некоторая дробь чётной длины больше либо равна некоторой дроби нечётной длины, то исходя из свойства 7 получаем что последняя дробь чётной длины больше либо равна последней дроби нечётной длины. Исходя из ранее доказанного получаем противоречие.

Теорема. Решениями уравнения $x+by=c, (a,b)|c$ являются следующие числа

$$x = (-1)^{m-1} Q_{m-1} P_m c/a + Q_m t,$$
$$y = (-1)^m P_{m-1} Q_m c/a - P_m t, t \in \mathbb{Z},$$

где $a/b = [a_0, a_1, \dots, a_m]$, P_m/Q_m и P_{m-1}/Q_{m-1} - соответствующие подходящие дроби.

Задача. Решить уравнение $17x + 24y = 1$.

Оно очевидно разрешимо, так как $(17, 24)|1$.

Ранее было получено следующее представление $17/24 = [0, 1, 2, 2, 3]$. Также было найдено, что $P_3 = 5$, $Q_3 = 7$, $P_4 = 17$, $Q_4 = 24$. Таким образом получаем:

$$x = -7 + 24t \qquad y = 5 - 17t \quad t \in \mathbb{Z}.$$

Замечание. Можно рассмотреть понятие конечной обобщённой дроби, а именно цепной дроби $[a_0, a_1, \dots, a_m]$, где $a_0 \in \mathbb{Z}, a_1, \dots, a_{m-1} \in \mathbb{Z}/\{0\}, a_m \in \mathbb{Z}/\{0, 1\}$. Отметим, что тогда, как правило, разложение в цепную дробь не единственно, но некоторые представления числа $\frac{k}{l}$ в виде обощённой цепной дроби можно получить используя обобщённый алгоритм Евклида(такой алгоритм, вообще говоря, не единственен), а именно алгоритм в котором используется следующее деление с остатком: $a = qb + r$, $|r| < |b|$

Пример. Получить некоторые разложения в обобщённую цепную дробь дроби $17/24$.

Заметим, что одно разложение $17/24 = [0, 1, 2, 2, 3]$ уже было найдено. Далее воспользуемся обощённым алгоритмом Евклида:

$$17 = 0 \cdot 24 + 17,$$
$$24 = 2 \cdot 17 - 10,$$
$$17 = (-2) \cdot (-10) - 3,$$
$$-10 = (-4) \cdot (-3) + 2,$$
$$-3 = (-2) \cdot 2 + 1,$$
$$2 = 2 \cdot 1.$$

Таким образом имеем также следующее разложение - $17/24 = [0, 2, -2, -4, -2, 2]$. Аналогично

$$17 = 0 \cdot 24 + 17,$$
$$24 = 1 \cdot 17 + 7,$$
$$17 = 3 \cdot 7 - 4,$$
$$7 = 2 \cdot (-4) + 1,$$
$$-4 = (-4) \cdot 1.$$

Таким образом имеем также следующее разложение - $17/24 = [0, 1, 3, 2, -4]$.

2.1 Бесконечные цепные дроби.

Рассмотрим некоторую бесконечную последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_m, \ldots$, такую что $a_0 \in \mathbb{Z}, a_i \in \mathbb{N}, i \neq 0$. Обозначим через $P_n/Q_n = [a_0, a_1, \ldots, a_n]$. Если существует $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n}$, то будем говорить, что *цепная дробь порождённая последовательностью* (a_m) *сходится* и будем записывать

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} = \alpha.$$

Данную конструкцию будем называть *бесконечной цепной дробью.* По аналогии с конечными цепными дробями a_i будем называть *коэффициентами бесконечной цепной дроби,* P_n/Q_n, P_n и Q_n *подходящей дробью, подходящим числителем и знаменателем* соответственно.

Теорема 3. Любая подходящая дробь сходится.

Доказательство

Исходя из свойства 2 получаем

$$\left|\frac{P_n}{Q_n} - \frac{P_{n-1}}{Q_{n-1}}\right| = \frac{1}{Q_n Q_{n-1}} \leq \frac{1}{Q_n^2}.$$

Исход из того, что Q_n является строго возрастающей начиная со второго элемената получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = +\infty$. Из этого следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n/Q_n - P_{n-1}/Q_{n-1} = 0$.

Далее обозначим $\alpha_k = P_{2k}/Q_{2k}$ и $\beta_k = P_{2k+1}/Q_{2k+1}$. Таким образом, мы получили, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n - \beta_n = 0$. Исходя из рассмотренных ранее свойст подходящих дробей получаем, что $\alpha_n \uparrow$ и $\beta_n \downarrow$. Также любое α_i не превосходит любого β_j.

Отметим, что последовательность α_n монотонна и ограничена(например β_0), а значит сходится. Аналогично β_n является сходящейся последовательностью. А значит

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n - \beta_n = \lim_{n\to\infty} \alpha_n - \lim_{n\to\infty} \beta_n = 0.$$

Тогда $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \lim_{n\to\infty} \beta_n$. Следовательно предел $\lim_{n\to\infty} P_n/Q_n$ существует.

Задача. Найти значение подходяще дроби $[1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots]$.

Решение

Обозначим значение дроби за α. Исходя из прошлой теоремы оно всегда существует.

Исходя из того что дробь периодическая можно заметить, что

$$\alpha = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\alpha}}.$$

Отсюда $4\alpha^2 - 4\alpha - 1 = 0$. Решая квадратное уравнение получаем

$$\alpha_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отметим, что $\alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}$ отрицательно, но нетрудно видеть, что $P_n, Q_n > 0$, а значит $\lim_{n\to\infty} \frac{P_n}{Q_n} \geq 0$. Таким образом α_2 не подходит. Отсюда следует, что

$$[1, 4, 1, 4, 1, 4, \dots] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Теорема 4. Число α представимо в виде бесконечной цепной дроби тогда и только тогда, когда оно иррационально. Причём коэффициенты a_i могут быть найдены с помощью следующего алгоритма:

$$\alpha_0 = \alpha \quad a_0 = [\alpha_0],$$

$$\alpha_i = \frac{1}{\alpha_{i-1} - a_{i-1}} \qquad a_i = [\alpha_i].$$

Теорема 5. Разложение в бесконечную цепную дробь иррационального числа α единственно.

Замечание. Доказательство этих двух теорем приведено в книге А.А.Бухштаба Теория чисел в главе Бесконечные цепные дроби.

Задача. Представить в виде бесконечной цепной дроби число $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Решение

$$\alpha_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad a_0 = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = 1,$$

$$\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad a_1 = \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] = 1.$$

Далее нетрудно заметить, что

$$\varphi = [1, 1, 1, 1, \dots].$$

Определение. Бесконечную цепную дробь $[a_0, a_1, a_2 \dots]$ будем называть *периодической*, если существую такие числа k и s_0, что для любого $s \geq s_0$ выполняется $a_s = a_{s+k}$. Если можно взять $s_0 = 0$, то такую дробь будем называть *чисто периодической*.

Пример. Дробь $[1, 1, 1, 1, \dots]$ является чисто периодической. Дробь $[2, 4, 4, 4, 4, \dots]$ является периодической, но не чисто периодической.

Теорема 6. Бесконечная цепная дробь является периодической тогда и только тогда она равна некоторой *квадратичной иррациональности*(то есть иррациональному корню некоторого многочлена второй степени с целыми коэффициентами).

Замечание. Доказательство данной теоремы приведено в книге А.А.Бухштаба Теория чисел в главе Квадратичные иррациональности и периодические цепные дроби.

Пример. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ является корнем многочлена $x^2 - x - 1 = 0$ и представимо в виде чисто периодической цепной дроби $[1, 1, 1, 1, \dots]$.

Можно показать, что $[2, 4, 4, 4, 4 \dots]$ равно $\sqrt{5}$, то есть корню многочлена $x^2 - 5 = 0$.

Определение. Рассмотрим некоторое иррациональное число α. Дробь a/b будем называть наилучшим приближением к α, если для любой другой дроби c/d, $d \leq b$ верно неравенство

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| < \left|\alpha - \frac{c}{d}\right|.$$

Теорема 7. Пусть $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$ и P_n/Q_n - подходящая дробь данной бесконечной цепной дроби. Тогда P_n/Q_n, $n \geq 1$ является наилучшим приближением к α.

Пример. Рассмотрим число π. $22/7$ является его наилучшим приближением, а также вторая подходящая дробь разложения числа π.

Приложение бесконечных цепных дробей. Рассмотрим уравнение в натуральных числах $x^2 - dy^2 = 1$, где d не является точным квадратом(это так называемое *уравнение Пелля*). Тогда все его решения могут быть найдены по следующим формулам:

$$x_n = \frac{1}{2}\left((x_0 + y_0\sqrt{d})^n + (x_0 - y_0\sqrt{d})^n\right),$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{d}}\left((x_0 + y_0\sqrt{d})^n - (x_0 - y_0\sqrt{d})^n\right),$$

где P_k/Q_k - подходящая дробь для $\sqrt{d}$, а $x_0 = P_{k-1}$, $y_0 = Q_{k-1}$, где k – четное число, такое что a_k является концом периода наименьшей четной длины с началом в a_1.

Задача. Решить уравнение $x^2 - 5y^2 = 1$ в натуральных числах.

Решение

Воспользуемся тем фактом, что $5 = [2, 4, 4, 4, 4, \dots]$. Тогда $k = 2$, $P_1/Q_1 = [2, 4] = 9/4$ и $x_0 = 9$, $y_0 = 4$. Тогда

$$x_n = \frac{1}{2}\left((9 + 4\sqrt{5})^n + (9 - 4\sqrt{5})^n\right),$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left((9+4\sqrt{5})^n - (9-4\sqrt{5})^n \right).$$

3 Задачи для самостоятельного решения.

Задача 1

a)Разложить в цепную дробь число 131/583, найти все подходящие дроби.

b)Найти значение бесконечной чисто периодической цепной дроби $[1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 2, \ldots]$.

c)Представить в виде бесконечной цепной дроби $\sqrt{2}$.

d)Решить уравнения $131x + 583y = 1$ и $x^2 - 2y^2 = 1$(в натуральных и целых числах соответственно).

e)Найти несколько разложений в обобщённую цепную дробь числа 131/583.

Задача 2

a)Получить аналоги свойств 1,4 и 5,6 для подхлдящих дробей P_n/Q_n и P_{n-3}/Q_{n-3}, где $3 \leq n \leq m$.

b)Пусть $f_\alpha(n)$ - количество точек с натуральными координатами в области координатной плоскости ограниченной прямой $y = \alpha x$, прямой $x = n$ и осью Ox. Будем считать, что $n \in \mathbb{N}$ и $\alpha > 0$. Пусть α иррационально. Покажите, что $f_\alpha(n) = f_{P_k/Q_k}(n)$, где P_k/Q_k - любая подходящая дробь для α с знаменателем большим n.